

FOGLIO DI ESERCIZI 1

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1.

- (1) Dimostrare che $d(x, y) := (x - y)^2$ non definisce una metrica su \mathbb{R} .
- (2) Dimostrare che

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \inf_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

non definisce una metrica su \mathbb{R}^n .

Esercizio 2. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che la funzione $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

è ancora una metrica su X .

Esercizio 3. (Permanenza del segno).

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua (\mathbb{R} è considerato con la topologia euclidea). Supponiamo che esista $x \in X$ tale che $f(x) > 0$. Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che $f(y) > 0$ per ogni $y \in B(x, \delta)$.

Esercizio 4. Sia $p > 0$ un numero primo fissato. Definiamo $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ come segue: $d(m, m) = 0$ mentre se $m \neq n$ allora $d(m, n) = 1/r$, dove $r - 1$ è la massima potenza di p che divide $m - n$. Dimostrare che d è una metrica su \mathbb{Z} .

Esercizio 5. Dimostrare che, in uno spazio metrico, una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2. Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico ed in esso una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.